

Escenarios de sincronización en el modelo de Winfree de osciladores acoplados

Rafael Gallego¹, Ernest Montbrió² y Diego Pazó³

¹Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, Campus de Viesques, 33203 Gijón

²Department of Information and Communication Technologies, Universitat Pompeu Fabra, 08003 Barcelona

³Instituto de Física de Cantabria (IFCA), CSIC-Universidad de Cantabria, 39005 Santander

La sincronización macroscópica es un fenómeno bien conocido que tiene lugar cuando un conjunto de osciladores sincronizan sus ritmos espontáneamente. Este fenómeno ocurre en sistemas tan dispares como enjambres de luciérnagas, uniones de Josephson en serie, aplausos de un público, etc.

La sincronización macroscópica fue modelizada con éxito por primera vez por Arthur T. Winfree en 1967. Su modelo consistía en una población de osciladores de fase que se comunicaban con interacciones tipo pulso [1, 2]. Este modelo ha tenido una gran influencia conceptual e inspiró unos años después el popular modelo de Kuramoto. Este es una simplificación del modelo de Winfree que ha sido estudiada profusamente. En el año 2014 [3], usando la teoría de Ott-Antonsen [4], pudimos investigar por primera vez de forma sistemática la interrelación entre las curvas de respuesta de fase (PRC, en inglés), que dan cuenta de la respuesta de un oscilador a una perturbación, y la estrechez de los pulsos. Estos ingredientes no están presentes en el modelo de Kuramoto por lo que nunca habían podido ser estudiados analíticamente.

El modelo de Winfree consiste en un conjunto de N osciladores de fase con frecuencias intrínsecas ω_i , $i = 1, 2, \dots, N \gg 1$. Las variables $\theta_i(t)$ son las fases que satisfacen el siguiente sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Q(\theta_i) \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N P(\theta_j).$$

El parámetro ε representa la intensidad del acoplamiento de cada oscilador con el campo medio $h = N^{-1} \sum_{j=1}^N P(\theta_j)$, que es el promedio sobre los pulsos emitidos por los osciladores. La función $Q(\theta)$ es la PRC y, por simplicidad, se toma idéntica para todos los osciladores. En nuestro estudio consideramos la siguiente familia de PRC

$$Q(\theta) = q(1 - \cos \theta) - \sin \theta,$$

donde el parámetro q determina el grado de asimetría de la función.

La heterogeneidad en la población reside en la diversidad de frecuencias naturales ω_i . Para poder aplicar la teoría de Ott-Antonsen, supondremos que las frecuencias están distribuidas según una Lorentziana

$$g(\omega) = \frac{\Delta/\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta^2}.$$

En esta contribución presentamos una extensión del artículo [3]. Mientras que en [3] se considera sólo un tipo de pulso, en este estudio consideramos dos tipos de pulso adicionales. Todos ellos tienen como caso límite una delta de Dirac, que corresponde a un pulso infinitamente estrecho.

La aplicación de la teoría de Ott-Antonsen nos permite reducir la dinámica del modelo de Winfree a un sistema dinámico bidimensional. En particular, obtenemos la siguiente ecuación diferencial compleja para el parámetro de orden $Z = N^{-1} \sum_j \exp(i\theta_j)$:

$$\dot{Z} = i(1 + i\Delta)Z + \frac{\varepsilon h}{2}[1 - Z^2 - iq(1 - Z)^2]. \quad (1)$$

Los ciclos límites estables en este modelo corresponden a un estado sincronizado en el que parte de la población oscila con la misma frecuencia. Por otra parte, el estado en el que los osciladores rotan de forma incoherente (más una parte que se encuentra en reposo) corresponde a un punto fijo estable.

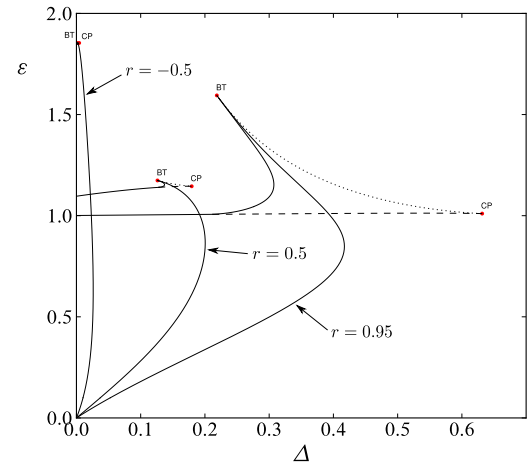


Figura 1: Diagramas de fase del modelo de Winfree en el plano (Δ, ε) para un pulso de la forma $P(r) = (1 - r)(1 + \cos \theta)/(1 - 2r \cos \theta + r^2)$, $r \in (-1, 1)$ y $q = 1$.

En la Figura 1 se muestran tres diagramas de fase típicos en el plano (Δ, ε) . La anchura del pulso es una función creciente del parámetro $r \in (-1, 1)$. El límite $r \rightarrow 1$ corresponde a un pulso infinitamente estrecho. En cada caso, la región de sincronización está delimitada por el eje de ordenadas y las curvas continuas. Se observa que la sincronización se favorece para pulsos estrechos. Para otros tipos de pulso se obtienen otros diagramas de fase, si bien el comportamiento anterior es genérico.

[1] A.T. Winfree, *J. Theor. Biol.* **16**, 15 (1967).

[2] A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York, 1980).

[3] D. Pazó y E. Montbrió, *Phys. Rev. X* **4**, 011009 (2014).

[4] E. Ott y T.M. Antonsen, *Chaos* **18**, 037113 (2008).